WUmaphy

Erste Stunde v1.1

am 15.10.2025

„If there is repetition, look for what does not change”

- A. Engel

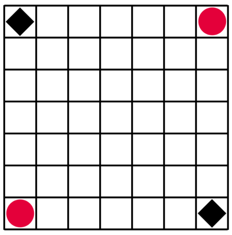
1

Die ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ sei ungerade. Joseph schreibt die Zahlen 1, 2, 4, ..., $2n-2$, $2n$ an die Tafel. Er wählt dann zwei Zahlen a und b aus, löscht sie und schreibt $|a-b|$ and die Tafel. Zeige, dass am Ende eine ungerade Zahl übrig bleibt.

Quelle: A. Engel, *Problem-Solving Strategies*

2

Arthur und Renate spielen auf einem quadratischen Spielbrett, das in 7×7 Spielfelder unterteilt ist. Arthur hat zwei rote Steine, die anfangs im linken unteren und rechten oberen Eckfeld liegen, Renate hat zwei schwarze Steine, die anfangs im linken oberen und rechten unteren Eckfeld liegen. Wer am Zug ist, wählt einen seiner beiden Spielsteine und bewegt ihn in ein waagrecht oder senkrecht benachbartes freies Feld. Arthur und Renate ziehen abwechselnd, Arthur beginnt. Arthur hat gewonnen, wenn seine beiden Steine nach endlich vielen Zügen in waagrecht oder senkrecht benachbarten Feldern liegen. Kann Renate dies durch geschicktes Ziehen verhindern?



Quelle: Bundeswettbewerb Mathematik 2024, Erste Runde

3

Alle Terme der Reihe 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... ab dem Siebten sind die Summe der 6 vorhärigen Terme $\bmod 10$. Beweise, dass die Seuqenz ..., 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... nie vorkommt.

Quelle: A. Engel, *Problem-Solving Strategies*

4

Zwei Springen befinden sich auf einem Schachbrett: der Schwarze steht auf dem Feld $A1$, der weiße auf dem Feld $B1$. Zwei Spieler ziehen mit den Springern nach den normalen Regeln, weiß fängt an. Kann der Schwarze den Weißen nach endlich vielen Zügen schlagen? Und der Weiße den Schwarzen?

Eigene Aufgabe

5

Kann man ein Schachbrett mit 32 Dominos (2×1) abdecken? Sollen die Felder $A1$ und $H8$ entfernt werden, kann man die restlichen Felder mit 31 Dominos abdecken?

Quelle: Ravi Vakil,
Putnam Problem-Solving Seminar
Week 5: Invariants

6

Ein Raum ist anfangs leer. Jeder Sekunde tritt eintweder eine Person in den Raum ein oder verlassen ihn zwei Personen. Können nach 3^{2025} Sekunden genau $3^{1000} + 2$ Personen in dem Raum sein?

Quelle: Ravi Vakil,
Putnam Problem-Solving Seminar
Week 5: Invariants

7

14 Bäume bilden einen Kreis. Auf jedem Baum ist ein Einhörchen. In einem Schritt müssen genau zwei Einhörchen auf einen benachbarten Baum rüberspringen. Ist es möglich, dass sich nach endlich vielen Schritten alle Einhörchen auf demselben Baum befinden?

Quelle: Sándor Róka,
2000 Aufgaben aus der elementaren Mathematik

8

Eine Fangschrecke sitzt links, , eine Laubheuschrecke in der Mitte und eine Feldgrille rechts, neben ihn, auf einer sehr langen Straße. Ab und zu mal spring eins der Insekten seinen Nachbar über. Sie springen immer nur parallel zu der Straße. Kann es sein, dass nach 1999 Sprünge die uhrsprüngliche Reihenfolge der Insekten wieder entsteht?

Quelle: Sándor Róka,
2000 Aufgaben aus der elementaren Mathematik

9

In einer Guppe aus $2n$ Personen hat jeder höchst $n - 1$ Feinde (Zwei Personen sind entweder gegenseitig Feinde oder die sind beide kein Feind der anderen.) Zeigen wir, dass alle aus der Gruppe so um einen runden Tisch sitzen können, dass keine Feinde nebeneinander sitzen müssen.

Quelle: Sándor Róka,
2000 Aufgaben aus der elementaren Mathematik

10

Eine Serie $(a)_n$ hat die Eigenschaft, dass für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt: $a_n = n \cdot a_{n+1}$, und $a_0 = 2$. Bestimme den Wert von

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \pi^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2} a_l \Big)^n$$